Estimation de la distribution de pertes et profits d'une société d'assurance (vie)

G. Castellani[1,3], S. Dang-Nguyen[2] et L. Passalacqua[3]

[1]Alef Srl;
[2]Alef-servizi spa; stephane.dang-nguyen@alef.it
[3]Università La Sapienza.

Université d'été 2015 de l'Institut des Actuaires, Brest, 10 Juillet 2015

Introduction

– La directive *Solvency II* (Cf. [CoEC-09]) impose de calculer un *Solvency Capital Requirement* qui se base sur une estimation de la distribution des pertes et profits.

– Approche par *formule standard* ou *modèle interne*.
→ Sous réserve de standards (théoriques et de mise en œuvre), les sociétés peuvent substituer (partiellement ou totalement) des composants de la “formule standard”.

– L'objectif est de présenter un algoritme d'estimation de la distribution des pertes et profits en simulant *simultanément* les sources de risque *techniques* et *financières*.
→ Problème exigeant :
  · Standards de qualité (modélisation et mise en œuvre);
  · Caractéristiques des contrats;
  · Complexité informatique;
  · Temps de calcul raisonables;

– Solution au travers d'un système, **Disar**, développé par *Alef S.r.l.* :
  · Appliqué à certaines sociétés du marché italien;
  · *Calcul distribué*;

Plan de l'exposé

1. **Définition du Problème** : Du *Net Asset Value* au *Solvency Capital Requirement*

– On s'intéresse à la variable aléatoire *Net Asset Value* ($\mathtt{NAV}$), *Basic Own Funds* (*BOF*) ou *full Profit and Loss Distribution* (*P&LD*), à un instant $t \geq 0$, définie par :

$$\mathtt{NAV}(t) = \mathcal{V}(t; \mathbf{X}) - \mathcal{V}(t; \mathbf{Y}), \tag{1}$$

où $\mathcal{V}(t; \mathbf{X})$ est la valeur *market consistent* des actifs en t et $\mathcal{V}(t; \mathbf{Y})$ celle des passifs.

– Le *Solvency Capital Requirement* ($\mathtt{SCR}$) en $t = 0$ pour un horizon $T > 0$ est donné par :

$$\mathtt{SCR}_\alpha(0, T) = \left[\mathbf{E}\mathtt{NAV}(T) - \mathtt{NAV}_\alpha(T)\right] v(0, T)\,, \tag{2}$$

$$\mathbf{E}\mathtt{NAV}(T) = \mathbf{E}_0^{\mathbb{P}}[\mathtt{NAV}(T)], \quad \mathtt{NAV}_\alpha(T) = x \ : \ P_0^{\mathbb{P}}(\mathtt{NAV}(T) \leq x) = \alpha, \tag{3}$$

où $v(0, T)$ le taux d'actualisation, $\mathbb{P}$ est la mesure naturelle et α le niveau de confiance.

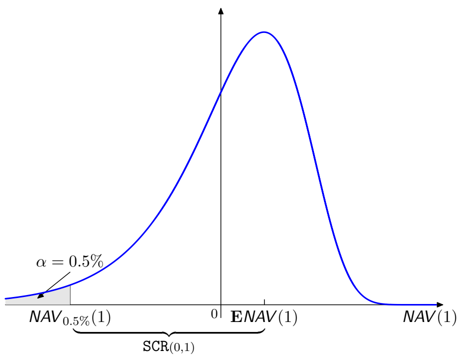


Figure 1: Graphique de la *P&LD* pour $T = 1$ et $\alpha = 0.005$

1. **Définition du Problème** : Typologie des Contrats Considérés

– Les actifs sont des titres financiers, des participations immobilières, des liquidités ...

– Les passifs sont de la dette (subordonée ou non), des polices traditionelles (*unit-* et *index-linked*) et de type *gestione separata*.

– Dans ce cas, ce sont des polices avec *participation aux bénéfices* et *garantie de rendement*. On peut donc décomposer leur valeur sous la forme (Cf. [DFM-05]) :

$$\mathcal{V}(t;\mathbf{Y}) = \mathcal{V}\left(t;\mathbf{Y}^G\right) + \mathcal{V}\left(t;\mathbf{Y}^O\right), \tag{4}$$

avec $\mathbf{Y}^G$ la composante *garantie* ($\equiv$ une obbligation avec coupons) et $\mathbf{Y}^O$ celle *optionelle* ($\equiv$ option, *future discretionary benefits*) :

· $\mathbf{Y}^O$ dépend du *rendement comptable d'un fonds*.
$\rightarrow$ Contrat *path-dependent*;

· Ce rendement (et donc sa volatilité) dépend des *management actions* relatives au fonds et de l'utilisation de la valeur *comptable*.
$\rightarrow$ L'entreprise dispose de leviers pour contrôler la valeur de $\mathcal{V}\left(t;\mathbf{Y}^O\right)$;

– Pour valoriser ces contrats, pas de formule fermée pour $\mathcal{V}\left(t;\mathbf{Y}^O\right)$.
$\rightarrow$ Simulations de *Monte-Carlo*.

1. Définition du Problème : Approches de Calcul

– Formule standard : *approche par blocks* et *shock instantanés*.
  → Modèle *normal multivarié* sous-jacent.

– Modèle interne : On effectue des simulations suivant eq. (2) avec du *nested Monte-Carlo*.

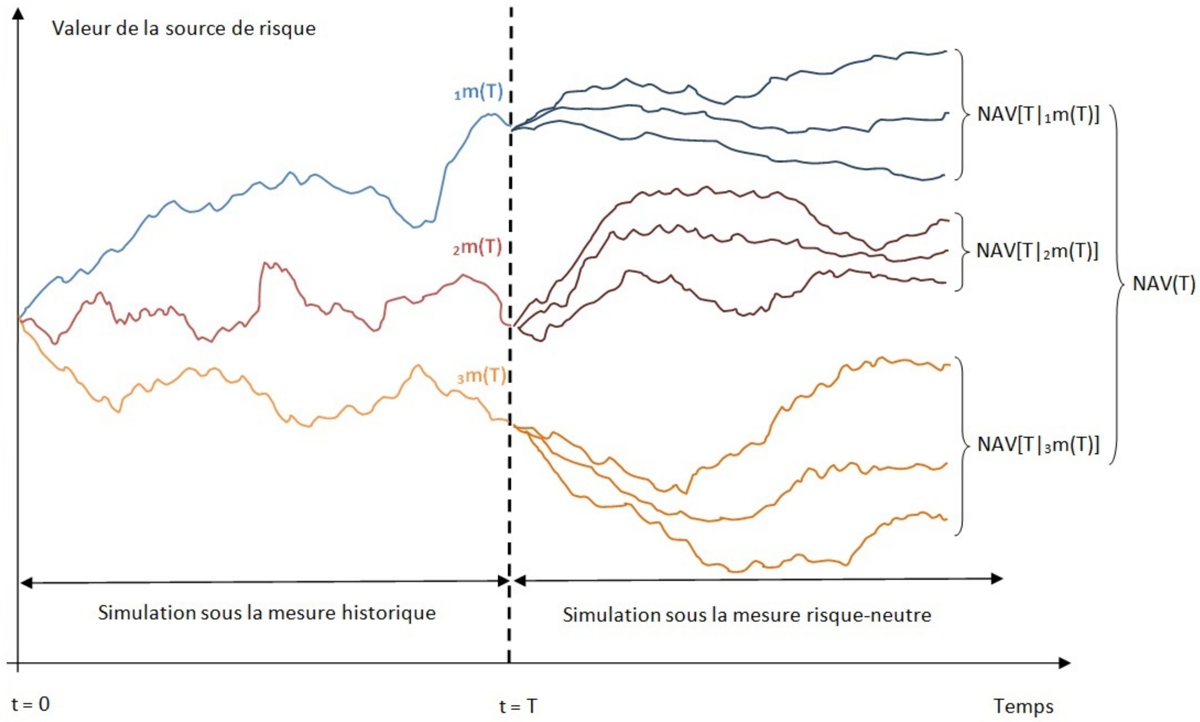


Figure 2: L'approche *full-valuation*

→ On doit simuler toutes les risques appropriées.

2. Mise en Œuvre d'un Modèle Interne : Les Risques Retenus

– En suivant la logique de la formule standard les différents risques sont :

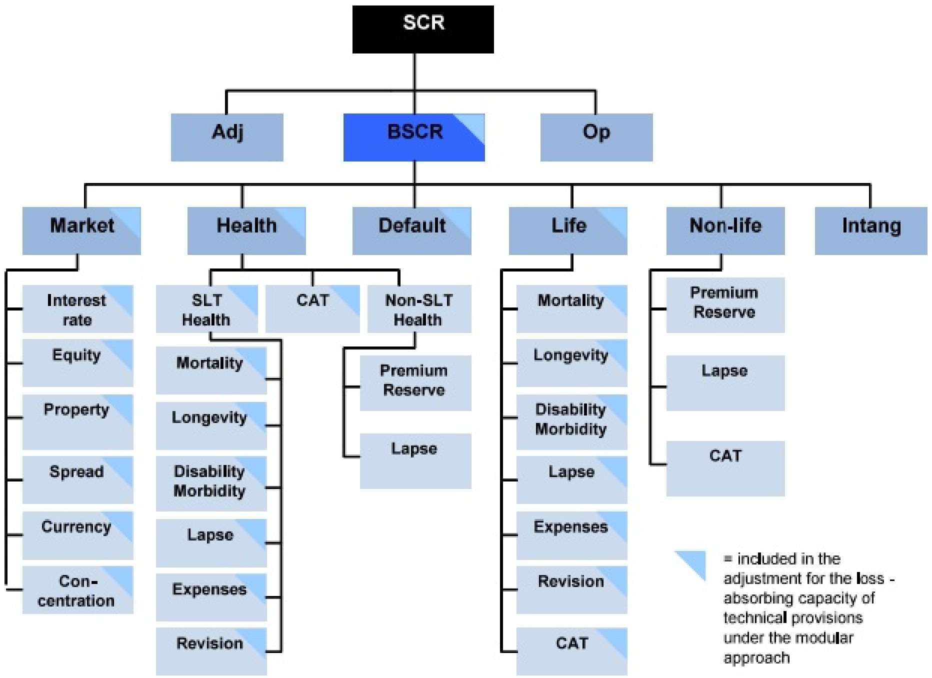


Figure 3: Les modules de risques de la formule standard

– On identifie le classes de risques pour les produits considérés : Risque de marché et techniques.
$\rightarrow$ Il faut un modèle approprié pour chaque source de risque.

2. **Mise en Œuvre d'un Modèle Interne** : Les Modèles Retenus

– Risques de marché :
  - Risque de taux : *Cox-Ingersoll-Ross*, (*G2++*);
  - Risque action : *Black-Scholes*, *Black-Scholes* avec *benchmark*;
  - Risque de change : *Lognormal*;
  - Risque de crédit : (*Duffie-Singleton*);
  - Risque immobilier : *Black-Scholes*, *Black-Scholes* avec *benchmark*;

– Risques techniques :
  - Risque de mortalité : *Lee-Carter*;
  - Risque de rachat : "à la *Lee-Carter*";
  - Risque de coût : *Lognormal*, *gamma*;

– Importation de *scenarii* exogènes (naturels).

2. Mise en Œuvre d'un Modèle Interne : Ordre de Grandeur des Calculs

Les ordres de grandeur des calculs sont (entreprise "moyenne") :

– Nombre de *gestione separate* : 10 par société;

– Pour chaque *gestione separata* : 100-250 000 polices associées;

– Risque de marché :
  · 1 à 5 courbes de taux sans risque;
  · 0 à 4 taux de change;
  · 0 à 5 indices boursiers;
  · 0 à 2 indices immobiliers;
  · 0 à 4 spread de crédit;

– Risque techniques :
  · 2 tables de mortalité;
  · 5 tables de rachat;
  · 1 processus pour les coûts;

– Il faut également prendre en compte la stratégie de gestion du fonds et la stratégie actif-passif de l'entreprise.
  $\rightarrow$ Exigeant d'un point de vue du calcul.

2. **Mise en Œuvre d'un Modèle Interne** : Réduction de la Complexité (1)

– Avec l'indépendance des risques techniques et financiers, on réécrit la valeur sous la forme (Cf. [DFM-05]) :

$$\mathcal{V}(t; \mathbf{Y}) = \sum_{\tau=1}^{N_T} \underbrace{C_\tau \mathbb{E}_t^{\mathbb{T}} \left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(\tau)} \right]}_{\text{flux probabilisés}} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\Phi(t, \tau) \right], \tag{5}$$

avec C_τ le "nominal" (déterministe), $\mathcal{E}(\tau)$ l'évènement assuré (aléatoire) et $\Phi(t, \tau)$ le coefficient de revalorisation (aléatoire). Note $\mathbb{E}_t^{\mathbb{T}} \left[\mathbb{I}_{\mathcal{E}(\tau)} \right]$ est une probabilité notée $P_\tau(t)$.

– On regroupe les polices en contrats équivalents qui ont des caractéristiques communes, les *noeuds*, sans détruire de l'information:

· N_{m+u} *noeuds* qui contiennent l'information relative aux risques techniques et financiers (10-15 %);

· N_m *noeuds* qui contiennent uniquement l'information relative aux risques financiers (1 %);

· Exemple : On considère deux polices identiques d'un point de vue financier et de même échéance mais dont les titulaires ont des âges différents. On a donc $N_{m+u} = 2$ et $N_m = 1$; Les *flux probabilisés* non destructifs sont :

$$\overline{C}_\tau^{(i)}(t) = C_\tau^{(i)} P_\tau^{(i)}(t) \quad i = 1, 2,$$

Le *flux probabilisé* relatif au risque *financier* est :

$$\overline{C}_\tau^{(1+2)}(t) = C_\tau^{(1)} P_\tau^{(1)}(t) + C_\tau^{(2)} P_\tau^{(2)}(t).$$

2. **Mise en Œuvre d'un Modèle Interne** : Réduction de la Complexité (2)

– Fitting de polynôme : On utilise un polynôme interpolant pour la composante optionelle (Cf. eq. (5)) de la police dans la logique du *least square Monte-Carlo*.

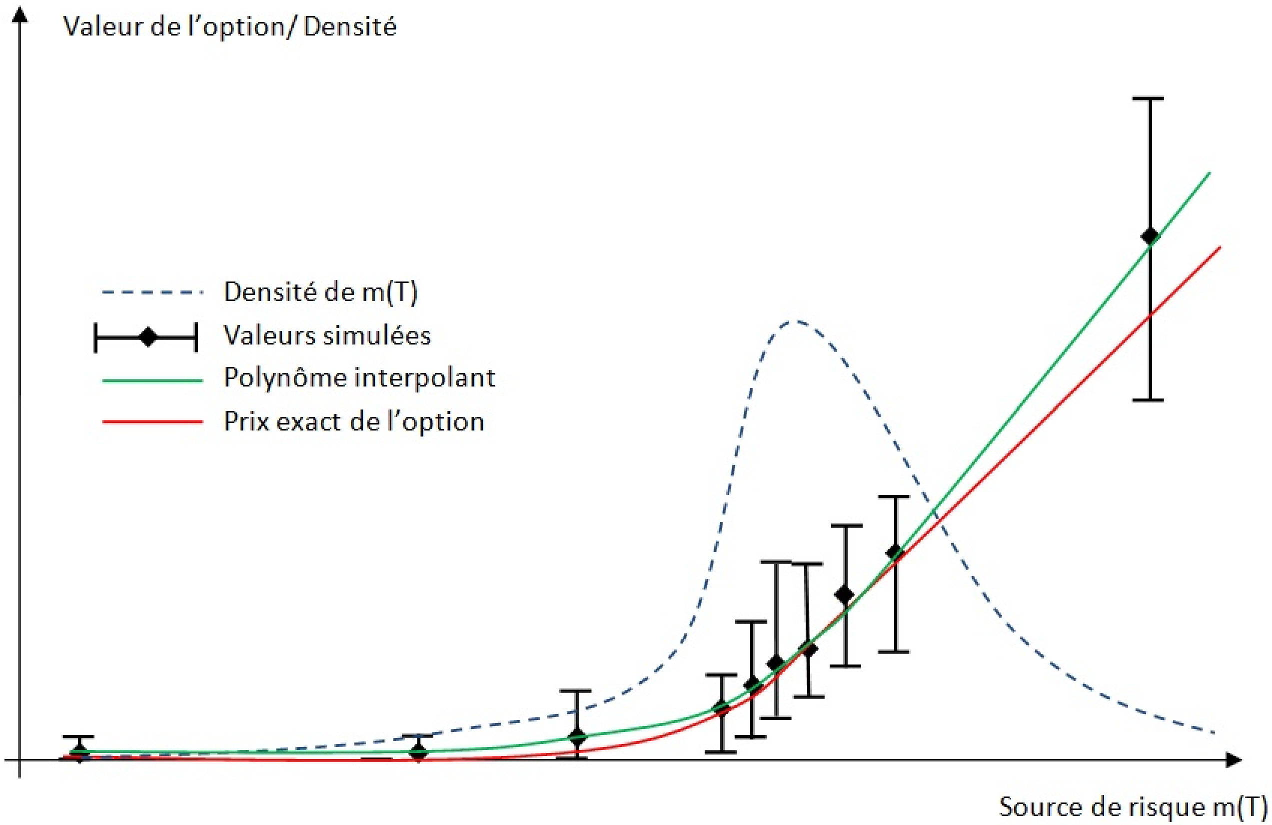


Figure 4: L'interpolation polynomiale de la composante optionelle

3. Description de l'Algoritme : Diagramme des Flux (1)

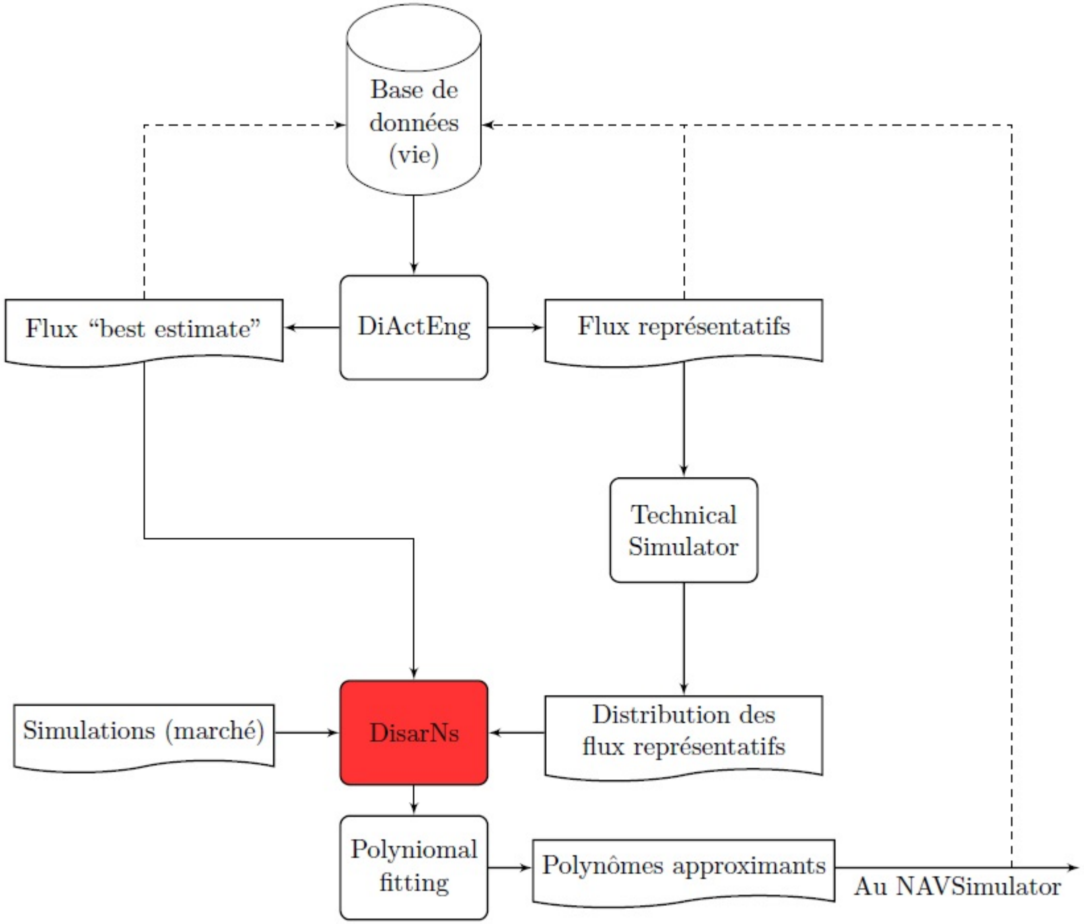


Figure 5: Diagramme des flux de calcul (1)

3. Description de l'Algoritme : Diagramme des Flux (2)

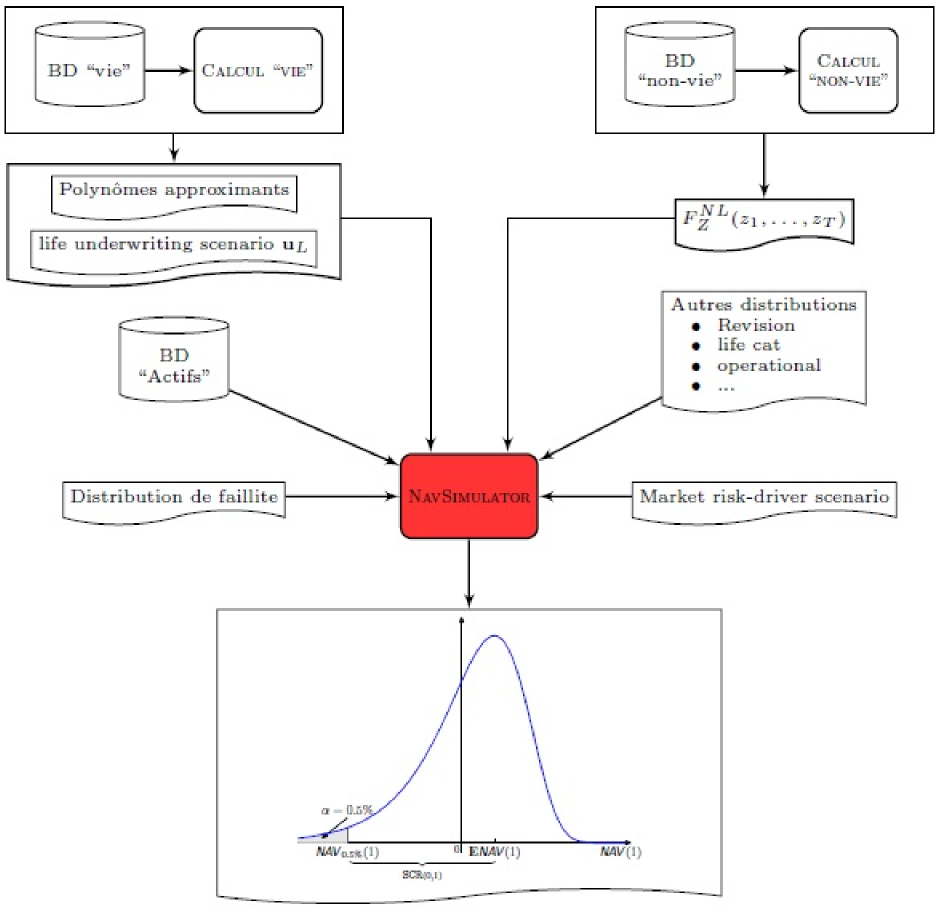


Figure 6: Diagramme des flux de calcul (2)

3. Description de l'Algoritme : Présentation du Système IDS

Approche par *calcul distribué* :

- Les calculs sont effectués pour chaque *gestione separata*;
- Avec des conditions de marché et risques techniques fixés;

→ Définition d'une *élaboration élémentaire*.

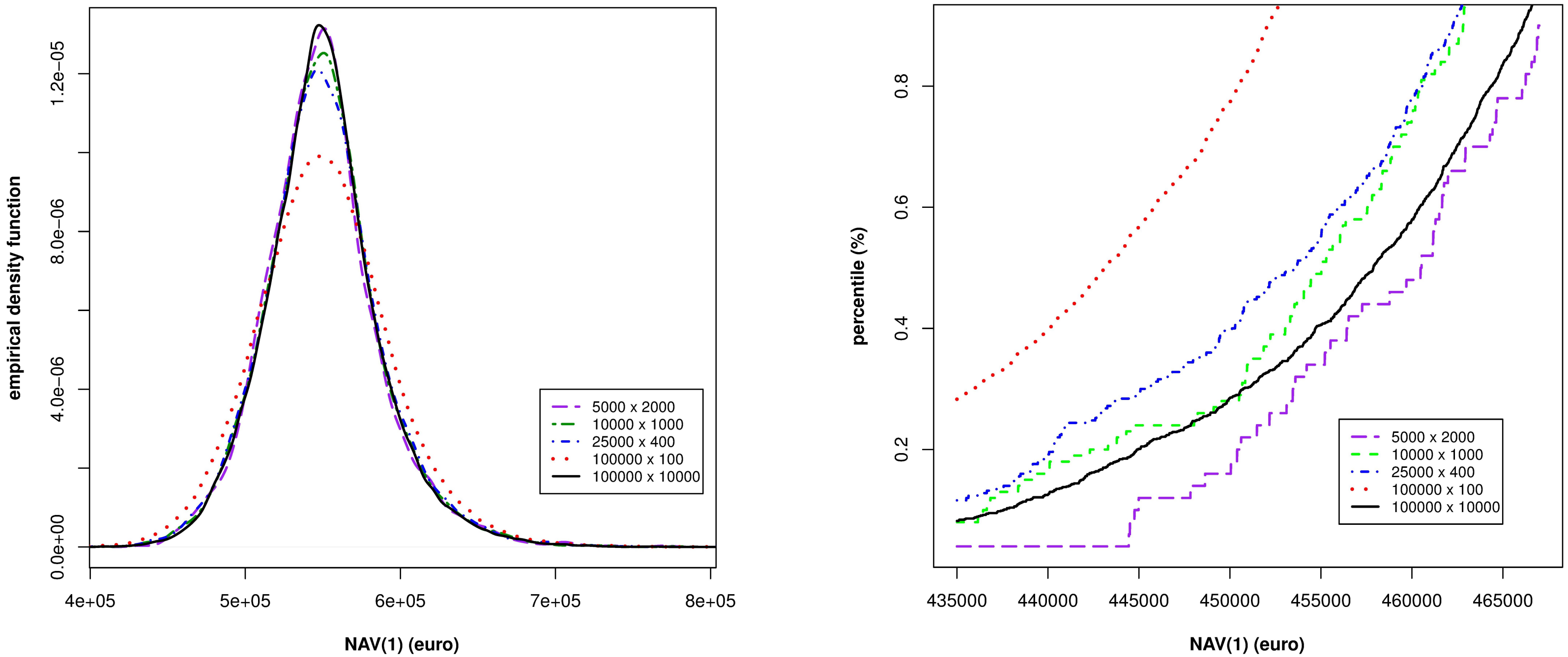
La simulation est effectuée grâce à un système **Insurance Data System (IDS)** dont les composantes nécessaires sont :

- Base de données : **DatAlef** (polices, données de marché, risques techniques);
- Définition du calcul : **DiInt** (interface-client);
- Gestion des calculs et aggrégation : **DiMas**;
- Calcul des *flux probabilisés* : **DiActEng**;
- Simulation des probabilités : **Technical simulator**;
- Calcul (simulation) avec le *nested Monte-Carlo* : **DisarNS**;
- Calcul (simulation) du `NAV` : **NAVSimulator**;

4. Considérations Numériques : Spécification du *Nested Monte-Carlo*

Choix du nombre de trajectoires naturelles et risque neutre:

On effectue $N_{\mathbb{P}}$ et $N_{\mathbb{Q}}$ simulations sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ suivant la logique de fig. (2). Pour un calcul élémentaire, on obtient (Cf. [CCPPZ-15]) :



(a) Densité

(b) Quantile

Figure 7: Impact sur le `NAV` du nombre de simulations $N_{\mathbb{P}} \times N_{\mathbb{Q}}$

4. Considérations Numériques : Gains par Calcul Distribué

Comparaison de la distribution d'un calcul élémentaire sur différents cœurs de processeurs. Pour un calcul élémentaire, on obtient (Cf. [CCPPZ-15]) :

Table 1: Temps de calcul en fonction des cœurs disponibles

# **cœurs**	**5000 × 2000**	**10000 × 1000**	**25000 × 400**	**100000 × 100**
1	5:43:10	5:37:20	5:36:21	5:33:10
4	1:27:04	1:24:47	1:24:30	1:25:30
8	0:43:51	0:43:02	0:42:14	0:42:50
16	0:23:56	0:23:13	0.23:05	0:23:08
32	0:13:04	0:12:36	0:12:02	0:12:14
64	0:06:07	0:06:06	0:06:10	0:06:13

Table 2: Gains (efficacité)

# **cœurs**	**5000 × 2000**	**10000 × 1000**	**25000 × 400**	**100000 × 100**
4	3.94 (0.985)	3.98 (0.995)	3.98 (0.995)	3.90 (0.974)
8	7.83 (0.978)	7.84 (0.980)	7.96 (0.996)	7.78 (0.972)
16	14.34 (0.896)	14.53 (0.910)	14.57 (0.911)	14.40 (0.900)
32	26.26 (0.821)	26.77 (0.837)	27.95 (0.873)	27.23 (0.851)
64	56.10 (0.877)	55.30 (0.864)	54.54 (0.852)	53.59 (0.837)

Conclusions

- La directive *Solvency II* offre la possibilité de mettre en œuvre un *modèle interne* pour estimer la *P&LD*, différence des prix de marché des actifs et passifs.
- La valorisation des polices associées aux *gestione separate* (donc de la *P&LD*) implique l'évaluation d'une composante optionnelle.
- L'estimation de la *P&LD* s'effectue donc avec une approche de *nested Monte-Carlo* du fait du grand nombre de sources de risque et de la complexité des contrats.
- Pour obtenir des temps de calcul raisonables :
  - On simplifie les calculs avec des *réductions en contrats élémentaires*;
  - On utilise l'approche de *least square Monte-Carlo*.
    → **Disar** effectue un calcul en deux sous-étapes;
  - On distribue le calcul sur une grille;

  → Cette approche propose des solutions à différents problèmes numériques.
- La solution est utilisée sur le marché italien.

Références bibliographiques :

- [CoEC-09] Commission of the European Communities, *Directive of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance - Solvency II*, Brussels, 22.4.2009.
- [CCPPZ-15] Casarano, G., Castellani, G., Passalacqua, L., Perla, F., Zanetti, P., *Relevant Applications of Monte-Carlo simulation on Solvency II*, soumis Soft Computing, 2015.
- [DFM-05] De Felice, M., Moriconi, F., *Market Based Tools for Managing the Life Insurance Company*, Astin Bulletin, 35(2005), 1.